www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSEEC

Concours 90
12 mai

MATHÉMATIQUES
Voies générale et générale prime

DURÉE : 4 HEURES
Coefficient 5

EXERCICE I

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ $B(e_1, e_2, e_3)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E défini par

$\varphi(e_1) = -e_1 - e_2 + 2e_3$; $\varphi(e_2) = -e_1$; $\varphi(e_3) = -e_1 + e_3$

Soit M la matrice de φ dans la base B. On notera $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées trois lignes trois colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et I la matrice unité.

1° — Déterminer M. Calculer M^2.

2° — Montrer que $M^3 = -I$ et en déduire M^{-1}.

3° — Soit B' le système de vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) défini par

$e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$; $e'_2 = e_1 - e_2$; $e'_3 = e_1 - 2e_3$

Montrer que B' est une base de E.
Déterminer la matrice de φ dans la base B' notée M'.

4° — Montrer que I, M, M^2 sont linéairement indépendantes.

5° — Soit F l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ du type $aI + bM + cM^2$ où a, b et c sont réels.
a — Montrer que F est un espace vectoriel de dimension trois sur $\mathbb{R}$.
b — Montrer que F est un anneau. Est-ce une algèbre sur $\mathbb{R}$?

6° — Montrer que si $A \in F$ A est inversible si et seulement si $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc \neq 0$
Montrer alors que l'inverse est dans F.

Exercice II : page suivante

EXERCICE III

Une personne donne n coups de téléphone à n correspondants distincts.
On admet que les appels sont indépendants entre eux et qu'il y a :
— la probabilité p d'obtenir le correspondant (quel qu'il soit),
— la probabilité $1 - p$ de ne pas l'obtenir.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

A. — Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer son espérance mathématique et son écart type.
Calculer les sept nombres $M_k = P_r(X = k)$ pour $n = 6$ et $p = 0{,}8$ chacun à 0,001 près.

B. — Après ses n recherches, cette personne rappelle une seconde fois dans les mêmes conditions, les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois.

Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels.
$Z = X + Y$ est donc la variable aléatoire égale au nombre de correspondants que cette personne a pu joindre à la fin de la seconde série d'appels.

1° — Calculer $p_0 = P_r(Z = 0)$

2° — Calculer $p_1 = P_r(Z = 1)$ et montrer que $p_1 = np(1-p)^{2n-2}(2-p)$

3° — Si on pose $p_2 = P_r(Z = 2)$ Calculer p_2

4° — En établissant auparavant $\sum_{j=0}^{k} C_n^j C_{n-j}^{k-j} = C_n^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j$

Calculer $P_r(Z = k)$
Quelle est la distribution de Z ?

Suite : page suivante

EXERCICE II

On considère la suite (u_n) où $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$

1° — Etude de la convergence de la suite (u_n)

a — Rappeler rapidement les variations de la fonction $x \mapsto \ln x$

b — En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[n,n+1]$ $n \in \mathbb{N}^*$ pour la fonction $x \mapsto \ln x$ démontrer que l'on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{1}{n+1} < \ln n - \ln n+1 < \frac{1}{n}$

c — En déduire que la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}^*$, est bornée et monotone donc convergente. Soit C sa limite appelée constante d'Euler.

On se propose d'exprimer C sous forme de l'intégrale d'une fonction.

2° — Etude de quelques inégalités utiles dans la suite de l'exercice.

a — Démontrer que pour tout $t > -1$ $\ln (1+t) \leqslant t$

En déduire que $0 \leqslant e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n$ pour $t \leqslant n$

b — On considère la fonction f_n définie par :

$f_n(t) = t + n \ln (1-\frac{t}{n}) - \ln (1-\frac{t^2}{n})$ pour $n \geqslant 1$

montrer qu'elle est positive sur $[0,\sqrt{n}]$

En déduire que $\quad e^{-t} \leqslant (1-\frac{t}{n})^n + \frac{t^2}{n} e^{-t}$ pour $0 \leqslant t < n$

3° — On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ et $T_n = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx$

démontrer par récurrence que $S_n = T_n$, en déduire que $S_n = -\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k}$

4° — Soit la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $I_n = \int_0^1 [1-(1-\frac{t}{n})^n] \frac{dt}{t}$

et $K = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$

a — Montrer que K est une intégrale convergente (on utilisera 2° — a — et le binôme de Newton).

b — Toujours à l'aide du 2° — montrer que $K = \lim_{n \to +\infty} I_n$

5° — Soit $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^n} dt$ $\quad n \geqslant 1$

a — Montrer que J_n est convergente (on pourra poser $u = \frac{1}{t}$).

b — Exprimer J_n sous la forme $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{n-2} dt$.

6° — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère K_n avec $K_n = \int_1^n (1-\frac{t}{n})^n \frac{dt}{t}$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} K_n = J_1$

7° — Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = I_n - K_n$ en déduire $C = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t} dt$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail